ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE Avril 1991

CONCOURS DE RECRUTEMENT

ELEVES - PILOTES DE TRANSPORT (EPT-S)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

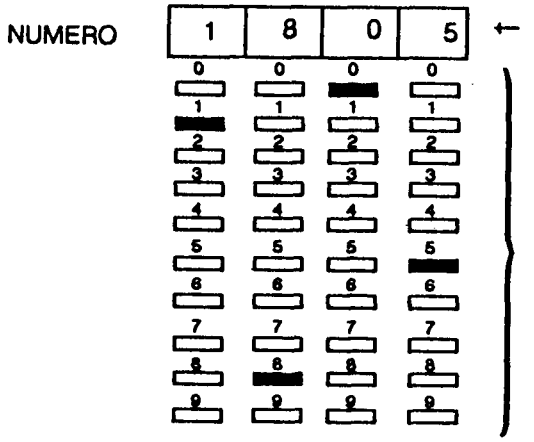
A LIRE TRES ATTENTIVEMENT

L'épreuve de Mathématiques "OBLIGATOIRE" de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

INSTRUCTIONS POUR REMPLIR LA FEUILLE DE REPONSES

1) Indiquez le concours et l'épreuve en rayant les mentions inutiles.

2) Inscrivez votre n° d'inscription dans la partie supérieure gauche de la feuille réponses ; supposons que votre numéro d'inscription (qui figure sur votre convocation) soit 1805 :



← a) inscrivez les 4 chiffres dans les cases ci-contre.

b) noircissez :

. pour le chiffre 1 le rectangle 1ère colonne ligne des 1.
. pour le chiffre 8 le rectangle 2ème colonne ligne des 8.
. pour le chiffre 0 le rectangle 3ème colonne ligne des 0.
. pour le chiffre 5 le rectangle 4ème colonne ligne des 5.

(voir modèle ci-contre)

3) Inscrivez vos : NOM
Prénoms
Date de naissance

4) La feuille de réponses doit être remplie à l'aide d'un crayon **n° 2 ou HB**, à l'exclusion de tout autre moyen d'écriture. **En effet, le lecteur optique ne détecte que les marques faites au crayon et il les lit même si elles ont été gommées - DONC PAS DE GOMMAGE -**

- Utilisez le questionnaire comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement. En cas d'erreur sur la feuille de réponses, n'hésitez pas à en demander une nouvelle aux surveillants.

- Prenez soin, lorsque vous noircissez une marque, de ne pas déborder sur les marques avoisinantes sous peine de pénalisation pour réponses multiples. (correction automatique)

- Votre feuille de réponses ne doit pas être souillée, froissée, pliée, écornée ou porter des inscriptions superflues sous peine d'être rejetée par la machine et de ne pas être corrigée.

A SUIVRE

5) Cette épreuve comporte 50 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet. **Chaque candidat devra choisir au plus 40 questions parmi les 50 proposées.**

Il est inutile de répondre à plus de 40 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 40 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 50, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro. (les lignes de 51 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne de 1 à 50 vous vous trouvez en face de quatre possibilités :

- soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
  la ligne correspondante doit rester vierge.
- soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
  vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.
- soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
  vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.
- soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne,
  vous devez alors noircir la case e.

Attention toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

7) EXEMPLE :

Question 01 : $1^2 + 2^2$ vaut

a) 3 b) 5 c) 4 d) -1

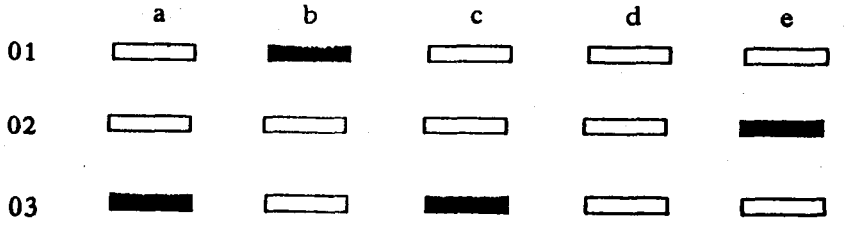
Question 02 : le produit (-1) (-3) vaut

a) -3 b) -1 c) 4 d) 0

Question 03 : les racines de l'équation $x^2 - 1 = 0$ sont

a) 1 b) 0 c) -1 d) 2

Vous marquerez sur la feuille-réponses :



Tournez la page S.V.P.

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Session 1991

CONCOURS DE RECRUTEMENT
D'ELEVES-PILOTES DE TRANSPORT (EPT-S)
(Mathématiques Supérieures)

QUESTIONS LIEES :

(1,2,3,4,5,6,7,8,9)
(10,11,12,13,14)
(15,16,17,18,19,20,21)
(22,23,24,25,26,27,28)
(29,30,31,32)
(33,34,35,36,37)
(38,39,40)
(41,42,43)
(44,45,46,47)
(48,49,50)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coef : 7

On considère les fonctions de la variable réelle x, définies pour $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

Question n°01

a) f n'admet pas de développement limité au voisinage de 0, $x>0$.

Dans le cas contraire pour $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ (1), nous avons :

b) $a_k = 0$, $\forall\, k$ pair. c) $a_k > 0$, $\forall\, k$ impair. d) $(-1)^k a_k < 0$, $\forall\, k \geq 1$.

Question n°02

Plus précisemment nous avons pour (1)

a) $a_0 = 1$. b) a_1 n'existe pas. c) $a_2 = -\frac{2}{15}$ d) $a_3 = \frac{2}{30}$.

Question n°03

a) La fonction f (donc g) est prolongeable par continuité en 0.
b) f est prolongeable sur $\mathbb{R}$.
c) f est dérivable à droite de 0.
d) f est non dérivable à droite de 0.

Question n°04

a) f et g n'ont pas le même sens de variation.

b) f' et g' ont les mêmes zéros sur $[0,+\infty[$.

On pose $g'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}\, \varphi(x)$.

c) $\varphi(x) < 0$, $\forall\, x > 0$.

d) g est croissante pour $x>0$.

Question n°05

On considère les développements généralisés de f et g pour $x = +\infty$,

$$f(x) = \alpha \sqrt{x} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \alpha' x + \beta' + \frac{\gamma'}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) La fonction $x \hookrightarrow Arctan\ x + Arctan\ \frac{1}{x}$ est constante sur $\mathbb{R}^*$.

b) $\alpha = \alpha'$. c) $\alpha = -\alpha'$. d) $\alpha\gamma = -1$.

Question n°06

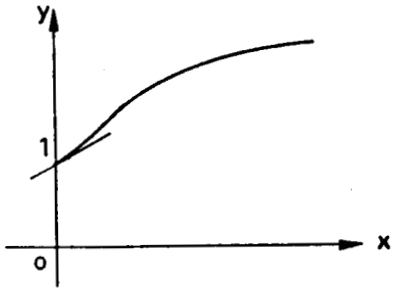
On pose $g''(x) = \frac{2}{x^3}\psi(x)$, pour $x>0$.

a) f est concave car ψ est croissante.
b) f'' et g'' sont de même signe.
c) Les fonctions f, g, φ et ψ sont croissantes.
d) De manière générale les fonctions $x \hookrightarrow f(x)$ et $x \hookrightarrow f(x^2)$ ont le même sens de variation (f étant définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$).

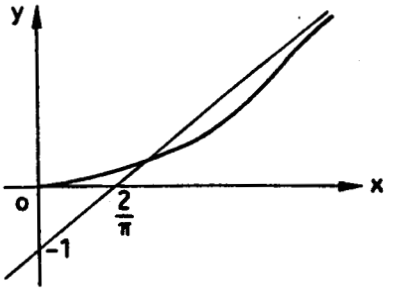
On note respectivement F, G, Φ et Ψ les courbes représentatives des fonctions f, g, φ et ψ dans un repère Oxy.

Question n°07

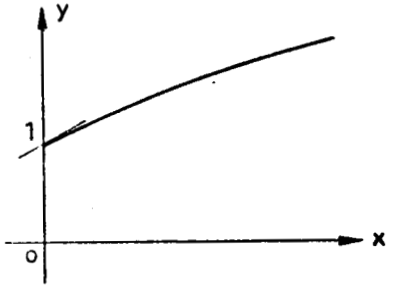
a) F est représentée par



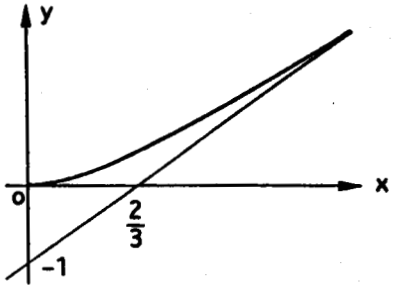
b) G est représentée par



c) F est représentée par

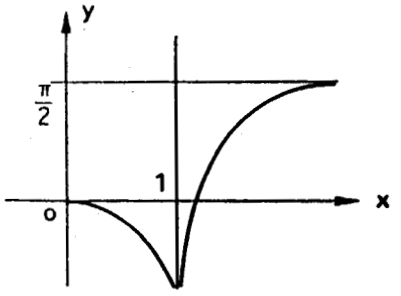


d) G est représentée par

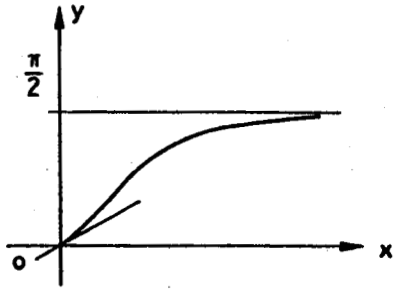


Question n°08

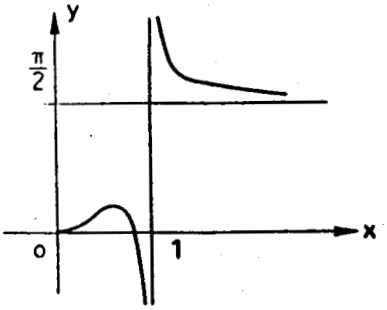
a) Φ est représentée par



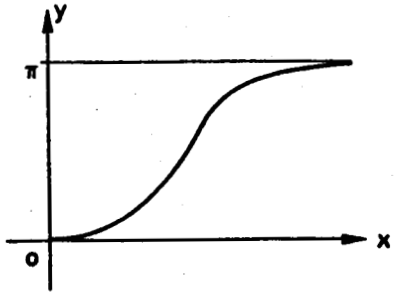
b) Ψ est représentée par



c) Φ est représentée par



d) Ψ est représentée par



Tournez la page S.V.P.

Question n°09

On considère l'équation différentielle

$$(1- x^2)\ y + x\ (1 + x^2)\ y' = 1 + x^2 \qquad (E)$$

a) $\mathcal{S} = \{\ x \mapsto g(x) + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\ \}$ est un espace vectoriel.
b) Tout élément de $\mathcal{S}$ est solution de (E).
c) f est une solution de (E).
d) Il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Soit la fonction définie sur $\mathcal{J}=[0,1]$ par $f(x) = x^3 + x - 1$, de courbe réprésentative C dans le repère orthonormé Oxy.

Question n°10

Soit α un zéro de f sur $\mathcal{J}$, α est unique car $f(0) \times f(1) < 0$ et

a) f est bornée.
b) f est strictement croissante.
c) f est continue.
d) $0 \in f(\mathcal{J})$

Question n°11

La tangente à C au point M d'abscisse p, $0 < p < 1$, coupe l'axe Ox au point N d'abscisse q. On pose $q = \varphi(p)$.

a) Il existe une valeur de p telle que N n'existe pas.
b) N existe et est unique pour tout p.
c) φ est monotone sur $\mathcal{J}$.
d) L'équation $\varphi(x) = x$ admet une seule racine dans $\mathcal{J}$.

Question n°12

La suite u définie par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, pour $n \geq 0$, $u_0 \in \mathcal{J}$, est

a) monotone.
b) majorée.
c) convergente.
d) stationnaire si $u_0 = 1$.

Question n°13

a) La suite u n'est pas convergente.

Dans le cas contraire soit l sa limite.

b) l n'est pas un zéro de f.
c) l existe car u est décroissante et minorée, pour tout u_0.
d) $l = 0.682328$ à 10^{-6} prés par défaut.

Question n°14

De manière générale, soit la suite v définie par $v_{n+1} = \psi(v_n)$, où ψ est une fonction dérivable sur $\mathcal{J}$. Alors :

a) ψ croissante $\Longrightarrow$ v croissante.
b) ψ décroissante $\Longrightarrow$ v décroissante.
c) $|\psi'(x)| \leq 1,\ \forall\ x \in \mathcal{J}$ $\Longrightarrow$ v convergente.
d) v converge vers $l \Longrightarrow \psi(l) = l$.

A SUIVRE

On considère la fonction définie par

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\cot an\, x}.$$

Question n°15

a) f est définie sur $\mathbb{R}$.
b) f est de période π.
c) f est prolongeable en zéro.
d) f est impaire.

Soit $\mathcal{J} = [0,2\pi]$. Dans les questions suivantes on suppose que $x \in \mathcal{J}$.

Question n°16

a) f est prolongeable par continuité sur $\mathcal{J}$.
b) $f(k\pi)$, pour k=0,1,2, est constant.
c) f est discontinue au point $x = \pi$.
d) $f(\pi+x) = f(x)$, pour $0 < x < \pi$.

Question n°17

On pose $f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sin^2 x}\varphi(x)$.

a) $\varphi(x) = -\ln(1 + \sin x) + (1 - \sin x)\sin x$.
b) $\varphi(x) = -\ln(1 - \sin x) + (1 - \sin x)\sin x$.
c) $\varphi(x) = -\ln(1 + \sin x) + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \sin x}\sin x$.
d) $\varphi(x) = -\ln(1 + \sin x) + (1 - \sin x)\cos x$.

Question n°18

Le développement limité de f, à l'ordre 2, au voisinage de $x = \pi$ est

$$f(x) = \alpha + \beta(x-\pi) + \gamma(x-\pi)^2 + o[(x-\pi)^2].$$

a) β est nul car f est paire.
b) $\alpha = e$, $\beta = -\dfrac{e}{2}$ et $\gamma = \dfrac{1}{24}$.
c) $\alpha = \dfrac{1}{e}$, $\beta = -\dfrac{e}{2}$ et $\gamma = \dfrac{7}{24}$.
d) $\alpha = \dfrac{1}{e}$, $\beta = 0$ et $\gamma = \dfrac{7}{24}$.

Question n°19

Pour obtenir le développement limité précédent, il est nécessaire de faire le développement limité de la fonction :

a) $x \hookrightarrow \sin x$, en $x = \pi$, à l'ordre 5.
b) $x \hookrightarrow (x-\pi)\cot an\, x$, en $x = \pi$, à l'ordre 4.
c) $x \hookrightarrow e^x$, en $x = 0$, à l'ordre 2.
d) $x \hookrightarrow \ln(1+x)$, en $x = 0$, à l'ordre 3.

NB: Il faut dans cette question sous-entendre que c'est l'ordre mimimum qui permet d'obtenir le développement de f à l'ordre 2.

Question n°20

Les variations de la fonction φ permettent de déterminer celles de f.

a) φ est dérivable sur $\mathcal{J}$.
b) φ admet deux extremums sur $\mathcal{J}$.
c) φ admet un zéro sur $[0,\pi]$.
d) φ n'est pas définie en $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Question n°21

a) $f'(0) = -\frac{e}{2}$.

b) $f'(\frac{3\pi}{2}) = e^2$.

c) $f'(2\pi) = -f'(0)$.

d) $f'(0) \times f'(\pi) = \frac{1}{4}$.

On considère l'intégrale $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$, où a et b sont des réels strictement positifs, et $x \in \mathcal{J} =]0,+\infty[$.

Question n°22

a) f existe pour tout $x \in \mathcal{J}$.

b) f est continue sur $\mathcal{J}$.

c) f n'est pas prolongeable en 0.

d) f est positive pour tout a et b.

Question n°23

Un changement de variable permet de transformer $f(x)$ sous la forme :

a) $f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

b) $f(x) = \int_{bx}^{ax} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

c) $f(x) = \int_a^b \frac{e^{-xt}}{t}\, dt$.

d) $f(x) = \int_b^a \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

Question n°24

Une écriture obtenue à la question précédente permet de montrer que :

a) f n'admet pas de limite finie en 0.

Dans le cas contraire, cette limite est égale à :

b) $\ln \frac{a}{b}$.

c) $\ln \frac{b}{a}$.

d) $\ln ab$.

Question n°25

La fonction $\varphi(y) = \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln t}\, dt$, définie pour $y > 0$ est

a) définie pour tout $y \neq 1$.

b) croissante pour $y > 0$.

c) décroissante pour $0 < y < 1$.

d) $\varphi(y) = \varphi(\frac{1}{y})$ pour tout $y > 1$.

Question n°26

Pour tout $y > 1$:

a) $\varphi(y) \leq \frac{y}{\ln y^2}$.

b) $\frac{y^2 - y}{2 \ln y} \leq \varphi(y)$.

La limite de $\varphi(y)$ pour $y \to +\infty$ est :

c) Nulle.

d) Infinie.

A SUIVRE

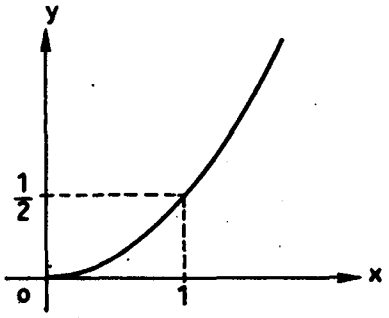
Question n°27

a) φ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
b) φ est prolongeable par continuité et dérivable à droite en 0.
c) φ est prolongeable par continuité mais non dérivable en 0.
d) φ admet une limite en 1.

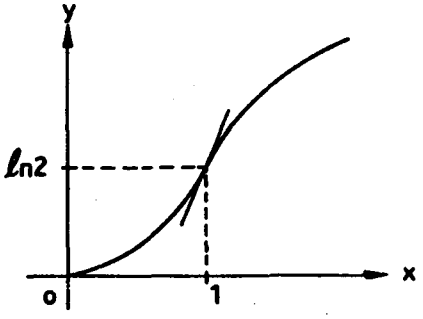
Question n°28

Dans le repère orthonormé Ωyz, la courbe représentative de φ est :

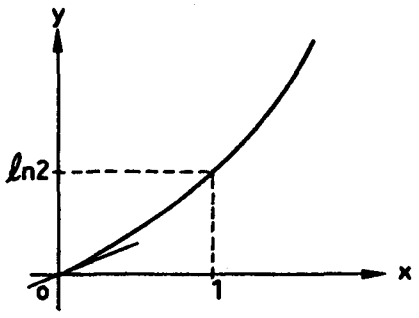
a)



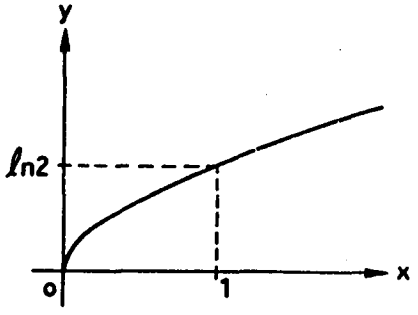
b)



c)



d)



On considère le système (m désignant un paramètre réel)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array}\right\} \qquad (S)$$

On associe à ce système la matrice

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 1+m & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -m & 3 & m+2 \end{array}\right),$$

que l'on transforme à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, soit $L_j \longleftarrow L_j + \lambda L_i$ avec $i \neq j$, ou $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange des lignes) afin d'obtenir la forme suivante :

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & a & b & \alpha \\ 0 & 0 & c & \beta \end{array}\right),$$

où a, b, c, α et β sont des fonctions de m.

Tournez la page S.V.P.

Question n°29

Toute combinaison d'opérations élémentaires qui transforment M en T, ne modifie pas :

a) Les valeurs de a et b.
b) La somme $a+c$.
c) Le produit ac.
d) les valeurs de α et β.

Question n°30

Le rang de la matrice M est strictement inférieur à 3, si m vaut

a) 1 b) 0 c) -2 d) 3

Question n°31

On suppose que (x,y,z) sont les coordonnées d'un point de l'espace affine euclidien usuel, ce qui permet de représenter (S).

a) Il existe une unique valeur de m telle que S soit une droite.
b) Il existe deux valeurs de m (au moins) telles que S soit un plan.
c) L'ensemble des valeurs de m telles que S soit réduit à un point est un intervalle de $\mathbb{R}$.
d) Pour $m = -2$, S est réduit au point $(0,0,0)$.

Question n°32

On suppose dans cette question $m = 2$. Le système (S) est :

a) Indéterminé.
b) Impossible.
c) De Cramer.
d) Trivial (Seule solution (0,0,0))

Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ rapporté au repère orthonomé $Oxyz$, on considère l'application affine f d'expression analytique

$$\begin{cases} x' = \lambda + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y' = 2(1-\lambda) - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \\ z' = -\lambda + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. On associe à f, l'endomorphisme φ de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$ associé à $\mathcal{E}$, de matrice dans une base $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{E}$,

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question n°33

a) $M = {}^tM$. b) $M^2 = M$. c) $M^2 = I$. d) $M^3 = I$.

(I désigne la matrice unité d'ordre 3).

A SUIVRE

Question n°34

φ est une :

a) homothétie vectorielle.
b) isométrie vectorielle.
c) symétrie vectorielle.
d) rotation vectorielle.

Question n°35

f est, pour tout λ, une :

a) homothétie affine.
b) isométrie affine.
c) symétrie affine.
d) rotation affine.

Question n°36

a) f est la composée, non commutative, d'une symétrie affine et d'une translation.
b) f est la composée, commutative, d'une symétrie affine et d'une translation.
c) f est une symétrie affine si et seulement si $\lambda = \frac{2}{3}$.
d) Il existe une valeur de λ telle que f soit une translation.

Question n°37

On note V l'ensemble des vecteurs invariants de φ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des points invariants de f.

a) V est un plan vectoriel.
b) V est une droite vectorielle.
c) $\forall \lambda$, $\mathcal{V}$ est un plan affine.
d) Il existe une valeur (unique) λ, telle que $\mathcal{V}$ soit un plan affine.

On considère les équations dans $\mathbb{C}$,

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$\bar{z}^2 - 2z + 1 = 0 \qquad (2)$$

Question n°38

a) (1) est une équation du second degré et admet donc deux racines distinctes ou non.
b) Si z_0 est une solution de (1) alors $\bar{z}_0$ est une solution de (2).
c) Si z_0 est solution de (1) alors z_0 est solution de l'équation du quatrième degré : $z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = 0$ (3)
d) (1) et (2) ont au moins une solution différente.

Question n°39

Pour l'équation (3)

a) 1 est racine triple.
b) Les racines sont toutes réelle.
c) Trois racines distinctes
d) Une racine double (au moins).

Question n°40

Les racines de (1) sont :

a) -1. b) $-1+i$. c) $-1-2i$. d) 1.

On considère le polynôme dans $\mathbb{C}$

$$P(z) = (z+1)^n - z^n - \lambda, \text{ où } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } n \geq 4.$$

Question n°41

On suppose que α est un zéro de P d'ordre $k \geq 3$.

a) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$.
b) $\alpha^{n-1} = 1$.
c) $\alpha^n = 1$.
d) $\alpha + 1 = \alpha = 0$.

Question n°42

Nous déduisons de la question 41 que tout zéro α de P est d'ordre :

a) Strictement inférieur à 3.
b) Strictement supérieur à 2.
c) Au plus 2.
d) 1. (Tous les zéros sont simples)

Question n°43

Dans cette question, nous supposons : $k = 2$ et $n = 5$.

a) P n'admet alors aucun zéro d'ordre 2.

Dans le cas contraire si α est un zéro d'ordre 2 de P, alors :

b) Il existe deux valeurs de λ possibles.
c) La seule valeur possible de λ est $\frac{1}{4}$.
d) Une valeur possible de λ est $-\frac{1}{4}$.

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}$.

Question n°44

a) I est convergente car en 0, $\frac{1}{\sqrt{\tan x}}$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
b) I est divergente.
c) Il existe un changement de variable qui prouve que $I = J$.
d) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$.

Question n°45

Nous pouvons écrire la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{u^4+1} = \frac{\alpha u + \beta}{u^2 + au + 1} + \frac{\gamma u + \delta}{u^2 + bu + 1}.$$

A l'aide d'opérations classiques sur la décomposition, nous obtenons

a) $\beta + \delta = 1$.
b) $\beta = \delta = 0$, car le premier membre est une fonction paire.
c) $\alpha + \gamma = 1$, d'aprés le comportement à l'infini.
d) $b = -a$, $|b| = \sqrt{2}$.

A SUIVRE

Question n°46

On note, en supposant son existence, $F(x) = \int_0^x \frac{1}{u^4 + 1}\, du$, $x > 0$.

a) La décomposition de la question 45 permet de déterminer $F(x)$.

A et B des constantes, u et v des fractions rationnelles. $F(x)$ est :

b) $A \ln u$. c) $B \operatorname{Arctan} v$. d) $A \ln u + B \operatorname{Arctan} v$.

Question n°47

a) $I = J$. b) $I = 2J$. c) $I = \pi\sqrt{2}$. d) $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

On considère la courbe C d'équations paramètriques $x = \frac{t^2 - 1}{t}$, $y = \frac{t + 1}{t(t - 1)}$.

Question n°48

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble sur lequel est défini C.

a) $\mathcal{E} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $x' > 0$, $\forall\, t \in \mathcal{E}$.

c) Le produit des zéros de y' vaut 1.

d) $y' > 0$, $\forall\, t \in]0,1[$.

Question n°49

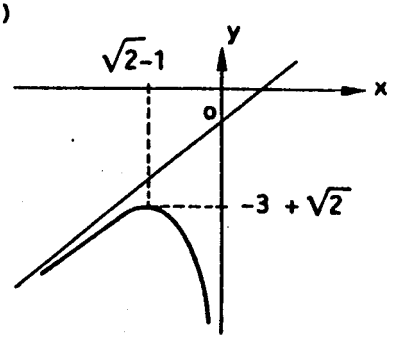
C admet pour asymptote la droite d'équation :

a) $x = 1$. b) $y = x - 2$. c) $y = -1$. d) $y = 0$.

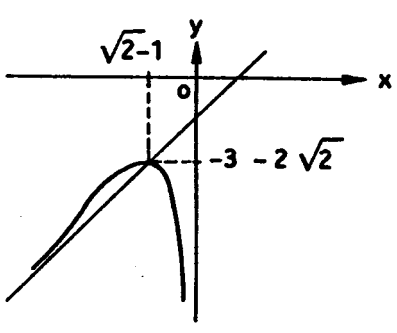
Question n°50

Pour $t \in]0,1[$, C est représentée par :

a)

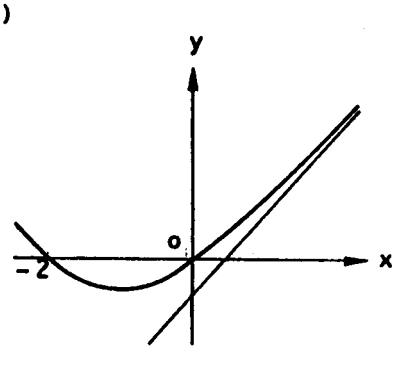


b)

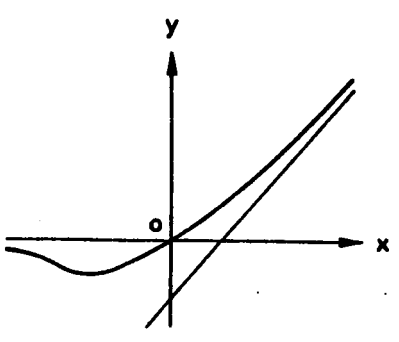


Pour $t \in]-\infty,0[$, C est représentée par :

c)



d)



FIN